

BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA SISTEM DINAMIK

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan
guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Oleh

MARDRIA YURESTUNINGRUM

05305144001

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2012**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mardria Yurestuningrum
NIM : 05305144001
Program Studi : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul Skripsi : Bifurkasi Transkritikal Pada Sistem Dinamik

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di Perguruan Tinggi lain, kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan.

Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 3 September 2012
Yang menyatakan,



Mardria Yurestuningrum
NIM. 05305144001

PERSETUJUAN

Skripsi dengan judul:

BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA SISTEM DINAMIK

Oleh

Mardria Yurestuningrum

05305144001

Telah disetujui oleh Dosen Pembimbing untuk dihadapkan kepada
Dewan Penguji Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui pada tanggal:

3 September 2012

Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing



Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si

NIP. 19790406 200501 1 005

PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL: “BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA SISTEM DINAMIK”

Yang disusun oleh:

Nama : Mardria Yurestuningrum

NIM : 05305144001

Program Studi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal
10 September 2012 dan dinyatakan lulus.

DEWAN PENGUJI

| Nama | Jabatan | Tanda Tangan | Tanggal |
|--|--------------------|--|-----------|
| <u>Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si</u> NIP.19790406 200501 1 005 | Ketua Penguji |  | 28/9/2012 |
| <u>Nikenasih Binatari, M.Si</u> NIP. 19841019 200812 2 005 | Sekretaris Penguji |  | 24/9 '12 |
| <u>Dr. Agus Maman Abadi</u> NIP. 19700828 199502 1 001 | Penguji Utama |  | 21/9/2012 |
| <u>Musthofa, M.Sc</u> NIP. 19801107 200604 1 001 | Penguji Pendamping |  | 24/9 2012 |

Yogyakarta, September 2012
Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta



Dr. Hartono

NIP. 19620329 198702 1 002

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

“Sesungguhnya Allah tidak akan merubah ni’mat yang ada pada suatu kaum (kecuali) bila mereka sendiri merubah keadaannya”.(QS. Ar-Ra’d : 11)

Yang terpenting adalah bukan berapa kali kita mengalami sebuah kegagalan, melainkan berapa kali kita bangkit dari kegagalan itu.

Selalu berdo’a, berusaha, tawakal, pantang menyerah, optimis, dan *positive thinking* serta jadilah orang yang meraih sukses mulia.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

Almarhumah Ibu, semoga engkau bahagia di sana dan mendapatkan tempat terindah di sisi

Allah SWT, Amin... , Bapak, Mas Nindro, Mas Budi, Eyang, dan Mas Ayub.

Percayalah bahwa Allah akan selalu memberikan jalan terbaik untuk kita dalam hidup ini...

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, segala puji syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis telah mampu menyelesaikan skripsi dengan judul “Bifurkasi Transkritikal Pada Sistem Dinamik”. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata satu guna memperoleh gelar Sarjana Sains.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis telah banyak menerima bimbingan dan bantuan yang sangat bermanfaat dari berbagai pihak. Penulis menghaturkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada Bapak Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan nasehat, waktu, dan pikiran untuk membimbing penulis hingga dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Penulis tidak lupa mengucapkan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Hartono, selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberi izin dan kesempatan kepada penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Sugiman, selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memudahkan dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi, selaku Koordinator Program Studi Matematika yang telah memudahkan dalam urusan akademik, serta memberikan nasehat, arahan, dan masukan yang sangat membangun.

4. Ibu Kuswari Hernawati, M.Kom, selaku Penasehat Akademik yang telah memberikan nasehat, arahan, dan masukan yang sangat membangun.
5. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah membekali ilmu yang sangat bermanfaat bagi penulis.
6. Orangtua, kakak, seluruh keluarga besar penulis, dan mas Ayub yang senantiasa memberikan do'a, semangat, dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi.
7. Nopi Triyani, Avienta Ika Pratiwi, Tri Sihono, Nurul Mukti B.P, dan teman-teman seperjuangan Matematika Non Reguler 2005 yang terus memberikan motivasi, semangat, dan bantuannya dalam penyusunan skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Penulis sadar bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca khususnya mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.

Yogyakarta, 3 September 2012

Penulis

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|-------------------------------------|----------------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| HALAMAN PERNYATAAN | ii |
| HALAMAN PERSETUJUAN | iii |
| HALAMAN PENGESAHAN | iv |
| HALAMAN MOTTO DAN PERSEMBAHAN | v |
| KATA PENGANTAR | vi |
| DAFTAR ISI | viii |
| DAFTAR SIMBOL | x |
| DAFTAR GAMBAR | xi |
| ABSTRAK | xii |

BAB I PENDAHULUAN

| | |
|---------------------------------|---|
| A. Latar Belakang Masalah | 1 |
| B. Rumusan Masalah | 3 |
| C. Tujuan Penulisan | 3 |
| D. Manfaat Penulisan | 4 |

BAB II KAJIAN PUSTAKA

| | |
|---------------------------------------|----|
| A. Sistem Dinamik | 5 |
| B. Titik Ekuilibrium | 6 |
| C. Nilai Eigen | 6 |
| D. Macam-macam Sistem Dinamik | 7 |
| 1. Sistem Dinamik Linear | 7 |
| a. Nilai Eigen Real dan Berbeda | 8 |
| b. Nilai Eigen Kompleks | 14 |
| c. Nilai Eigen Real Kembar | 21 |
| 2. Sistem Dinamik Non-Linear | 25 |

| | |
|--|----|
| E. Kestabilan Titik Ekuilibrium | 25 |
| BAB III PEMBAHASAN | |
| A. Bifurkasi Transkritikal pada Sistem Berdimensi Satu ... | 28 |
| B. Bifurkasi Transkritikal pada Sistem Berdimensi- n | 38 |
| C. Titik <i>Saddle</i> dan Titik <i>Cusp</i> | 43 |
| BAB IV PENUTUP | |
| A. Kesimpulan | 48 |
| B. Saran | 48 |
| DAFTAR PUSTAKA | 49 |
| LAMPIRAN | |

DAFTAR SIMBOL

| | |
|--|---|
| \dot{x} | Turunan pertama x terhadap waktu $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ |
| $f(x, \mu)$ | Fungsi f di titik x dan μ |
| μ | Parameter |
| \mathbb{R}^n | Ruang dimensi- n |
| C^1 | Himpunan fungsi-fungsi yang turunan pertamanya adalah fungsi kontinu |
| E | Himpunan terbuka \mathbb{R}^n |
| $\phi_t(x)$ | Sistem dinamik pada saat t di titik x |
| \bar{x} | Titik ekuilibrium |
| λ | Nilai eigen |
| v | Vektor eigen |
| I | Matriks identitas |
| x_0 | Nilai awal |
| $x(t)$ | Fungsi solusi sistem dinamik linear |
| P^{-1} | Invers matriks P |
| $\bar{\lambda}_j$ | Konjugat dari λ_j |
| θ | Sudut |
| $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})$ | Turunan parsial pertama dari fungsi f terhadap x di titik \bar{x} , dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ |
| $Jf(\bar{x})$ | Matriks Jacobian dari fungsi f di titik \bar{x} |
| ε | Epsilon |
| δ | Delta |
| $Re(\lambda)$ | Bagian real nilai eigen |
| $\frac{\partial f}{\partial x}$ | Turunan parsial pertama dari fungsi f terhadap x |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ | Turunan parsial kedua dari fungsi f terhadap x |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}$ | Turunan parsial dari turunan parsial pertama fungsi f terhadap μ yang diturunkan terhadap $x \left(\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial \mu})}{\partial x}\right)$ |
| $\frac{d\mu}{dx}$ | Turunan pertama μ terhadap x |
| $\phi(x)$ | Solusi dari persamaan $y + Q_2(x, y) = 0$ |
| $\psi(x)$ | Ekspansi dari fungsi $P_2(x, \phi(x))$ |

DAFTAR GAMBAR

| | Halaman |
|--|---------|
| Gambar 1. Koordinat Kutub | 16 |
| Gambar 2. Diagram Titik Ekuilibrium Sistem (3.10) | 32 |
| Gambar 3. Diagram Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem (3.10) | 34 |
| Gambar 4. Diagram Daerah-daerah yang Dibatasi Titik Ekuilibrium Sistem (3.10) | 34 |
| Gambar 5. Diagram Potret Fase untuk Daerah-daerah yang Dibatasi Titik Ekuilibrium Sistem (3.10) | 37 |
| Gambar 6. Potret Fase Sistem (3.11) | 40 |
| Gambar 7. Titik <i>Saddle</i> | 43 |
| Gambar 8. Titik <i>Cusp</i> | 43 |

BIFURKASI TRANSKRITIKAL PADA SISTEM DINAMIK

Oleh
Mardria Yurestuningrum
05305144001

ABSTRAK

Kestabilan merupakan hal mendasar yang perlu diketahui dalam sistem dinamik. Sifat kestabilan dari sistem dinamik $\dot{x} = f(x, \mu)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobiannya. Matriks Jacobian adalah matriks yang entri-entrinya adalah turunan parsial pertama dari fungsi f yang dieksekusi pada titik ekuilibrium dari sistem $\dot{x} = f(x, \mu)$. Nilai eigen dapat bernilai negatif, positif, dan nol.

Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian mempunyai bagian real bernilai negatif, maka titik ekuilibrium dari sistem dikatakan stabil. Namun jika ada nilai eigen dari matriks Jacobian yang mempunyai bagian real bernilai positif, maka titik ekuilibrium dari sistem dikatakan tidak stabil. Di lain pihak, sistem yang mempunyai nilai eigen nol tidak dapat ditentukan sifat kestabilannya. Nilai eigen nol merupakan kondisi yang rentan terhadap gangguan, sehingga memungkinkan terjadinya bifurkasi. Bifurkasi adalah perbedaan keadaan dinamik seiring dengan perubahan parameter. Salah satu contoh bifurkasi adalah bifurkasi transkritikal. Bifurkasi transkritikal adalah bifurkasi yang ditandai dengan pertukaran kestabilan titik ekuilibrium.

Bentuk sistem yang dapat mengalami bifurkasi transkritikal adalah sistem yang memuat $\dot{x} = \mu x \pm x^2$. Dalam hal ini, μ adalah sebuah parameter. Pengaruh perubahan parameter terhadap keadaan sistem dinamik yang mengalami bifurkasi transkritikal adalah saat $\mu \neq 0$, banyaknya titik ekuilibrium adalah n , saat $\mu = 0$, banyaknya titik ekuilibrium adalah $n - 1$, dan terjadi pertukaran kestabilan titik ekuilibrium ketika melalui $\mu = 0$.